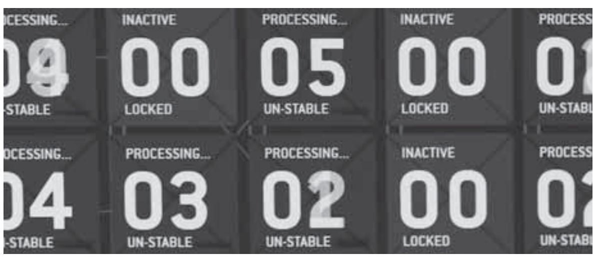
ایستگاه اعداد

احسان یارمحمدی

- **کارگردان:** کاسپار بارفورد[۱]
- **تهیه‌کنندگان:** شِـن فِرسـت[۲]، برایان فِرسـت[۳] و نایجل توماس[۴]
- **فیلم‌نامه‌نویس:** اِف. اِسکات فِریزِر[۵]
- **بازیگران:** جان کیوساک[۶] و مالین آکِرمن[۷]
- **موسیقی:** پل لئونارد ـ مورگان[۸]
- **تدوین:** کریس جیل[۹] و پِر سَندهُلت[۱۰]
- **تاریخ اکـران:** ۱۸ آوریـل ۲۰۱۳ در دانمارک و ۲۶ آوریل ۲۰۱۳ در ایالات متحده آمریکا*
- **مدت فیلم:** ۸۹ دقیقه
- **محصول:** پادشـاهی متحدهٔ بریتانیـا، ایالات متحدهٔ آمریکا و بلژیک
- **زبان فیلم:** انگلیسی



نام فیلم، ایســتگاه اعداد، برگرفته از روشــی است که برای ارسال پیام‌های رمزدار از آن اســتفاده می‌شود. به‌همین دلیل ابتدا به معرفی رمزنگاری و رمزگشــایی می‌پردازیم. سپس با استفاده از ماتریس‌ها و ارائـهٔ یک مثال، دانش‌آموزان را بیشــتر و بهتر بـا رمزنگاری به روش ریاضی آشنا می‌کنیم، تا بدین ترتیب هم مقدمه‌ای برای دانش‌آموزان علاقه‌مند به رشــتهٔ رمزنگاری و رمزگشــایی کـه می‌توانند در دوران تحصیلات تکمیلی دانشــگاهی، این رشــته را برگزینند، فراهم کرده باشیم و هم پیش‌زمینه‌ای را برای درک مفیدتر و عمیق‌تر فیلم مزبور به آن‌ها ارائه کرده باشیم.

پیشرفت بشر تا اندازهٔ زیادی مرهون قابلیت وی در برقراری ارتباط است و یک جنبهٔ اساسی این قابلیت، توانایی برقراری ارتباط از طریق نوشــتن است. از همان نخستین روزهای نوشتن، موقعیت‌هایی پیش می‌آمد که کســانی می‌خواســتند اطلاعات خود را منحصــراً به عدهٔ محدودی برســانند. آنان اسراری داشتند که می‌خواستند فاش نشود. برای این کار، طرح‌هایی یافتند که از آن راه می‌توانستند برای کسانی کـه به اطلاعات به‌خصوص مورد نیاز برای از رمز درآوردن دسترســی نداشــتند، مکاتبه‌های خود را نامفهوم ســازند. تکنیک‌های کلی برای به انجام رساندن چنین مقصودی، یعنی پنهان داشتن مفهوم پیام‌ها، مبحثــی را تشــکیل می‌دهــد که آن را تحــت عنــوان «رمزنگاری» می‌شناسیم.

پیش از پیدایش پُست به مفهوم امروزی آن و ارسال الکترونیکی اطلاعات، شیوهٔ معمول فرستادن پیام، استفاده از قاصد خصوصی بود. با وجود این، باز هم غالباً صلاح در این بود که از روش‌های پنهان‌سازی رمزنگاری استفاده شود، زیرا امکان دستگیر شدن قاصد یا خیانت وی وجود داشت. در روزگار کنونی هم، از پیامی که با بی‌سیم انتقال یابد، هر کســی که ابزار مناســب را داشته باشــد و از آن در زمان مناسب با انتخاب فرکانس صحیح اســتفاده کند، می‌تواند رونوشت بردارد. در چنین موردی نیز، اگر پنهان کردن محتوای پیام، موردنظر فرســتنده باشد، باید از نوعی شیوهٔ پنهان‌سازی رمزنگاری استفاده کند.

اما همان‌طور که فرســتندهٔ پیام تلاش می‌کند اطلاعات خود را از هر کس مگر گیرندهٔ موردنظر پنهان دارد، کســانی هم هستند که به کشــف محتوای پیام بســیار علاقه‌مندند، و چه بسا این افراد از همان کســانی باشــند که فرســتنده تلاش دارد، اطلاعات خود را از ایشان پنهان دارد. اگر چنین کســانی به طریقی رونوشــتی از پیام رمزی را

به‌دست آورند، در آشکار کردن رازی که پیام حاوی آن است، خواهند کوشید. البته تلاش آن‌ها بدون داشتن اطلاعاتی دربارهٔ جزئیات عمل رمزنگاری، که برای پنهان ساختن مضمون پیام به‌کار رفته است، انجام خواهد پذیرفت. تلاشی که از این راه و با هدف خواندن پیام‌های سرّی انجام پذیرد، تحت عنوان مبحثی قرار می‌گیرد که «رمزگشایی» نامیده می‌شود.

در تاریخ از موارد فراوانی می‌توان یاد کرد که رمزگشایی موفقیت‌آمیز، عامل خیلی مهمی در به‌دست آوردن موفقیت‌های سیاسی، کسب پیروزی‌های نظامی، دستگیری جنایتکاران و فعالیت‌های ضدجاسوسی بوده است. در ترجمهٔ اسناد تاریخی که از بایگانی‌های رسمی به‌دست آمده‌اند و تشخیص داده شده که به زبان سرّی نوشته شده‌اند، همچنین در بازسازی زبان‌هایی که مدت‌ها پیش از بین رفته‌اند و کسی دربارهٔ آن‌ها چیزی نمی‌داند و در حقیقت زبان‌هایی سرّی محسوب می‌شوند نیز رمزگشایی سهیم بوده است.

فرایندهای تحلیلی که در رمزگشایی به‌کار می‌روند، با استفاده

از تکنیک‌هایی صورت می‌گیرند که بعضی ریاضی‌اند، بعضی مربوط به زبان‌اند، بعضی ماهیت مهندسی دارند، و بعضی هم به‌راحتی قابل توصیف نیستند؛ مانند شانس، فراست، حس ششم و غیره.»[۱۱]

رمزنگاری با استفاده از ماتریس‌ها[۱۲]

رمزدار کردن پیام‌ها نیز در طول زمان‌های گذشته از اسلوب‌ها و مناسک متفاوت و متمایزی پیروی کرده‌اند که مجال پرداختن به آن‌ها از حوصلهٔ این مقاله خارج است. اما آنچه در این مقاله ملاک و معیار رمزدار کردن یک پیام است، بهره‌گیری و استفاده از مفاهیم ماتریس‌ها در جهت رمزدار کردن یک پیام است. بنابراین به ریاضی‌آموزان پیشنهاد می‌شود که برای درک بهتر و بیشتر این مقاله، آشنایی لازم و کافی را با مفاهیمی مانند: ضرب ماتریس‌ها، ماتریس مربعی[۱۳]، قطر اصلی[۱۴] ماتریس، دترمینان[۱۵]، ماتریس معکوس‌پذیر[۱۶]، ماتریس بالا مثلثی[۱۷]، ماتریس پایین مثلثی[۱۸]، اعمال سطری مقدماتی[۱۹] و اعمال ستونی مقدماتی[۲۰] داشته باشند. البته تعدادی از مطالب و نکات لازم برای مطالعهٔ رمزنگاری با استفاده از ماتریس‌ها را قبل از ورود به آن آورده‌ایم.

نکتهٔ ۱. اگر A ماتریسی مربعی با دترمینان مخالف صفر ($\det(A)=|A|\neq 0$) باشد، آن‌گاه ماتریس A معکوس‌پذیر و دارای معکوس A^{-1} است.

نکتهٔ ۲. اگر A ماتریسی معکوس‌پذیر باشد، آن‌گاه داریم: $AA^{-1}=A^{-1}A=I$ (I ماتریس همانی[۲۱] هم‌مرتبه با ماتریس A است.)

نکتهٔ ۳. اگر A ماتریسی معکوس‌پذیر باشد، آن‌گاه داریم: $A^{-1}=\frac{1}{|A|}A^*$ (A^* ماتریس الحاقی[۲۲] هم‌مرتبه با ماتریس A است.)

نکتهٔ ۴. اعمال سطری مقدماتی عبارت‌اند از:
- تعویض دو سطر از ماتریس با یکدیگر.
- ضرب یک سطر از ماتریس در یک عدد حقیقی مخالف صفر.
- اضافه کردن مضربی از یک سطر ماتریس به سطر دیگر آن.

نکتهٔ ۵. اعمال ستونی مقدماتی عبارت‌اند از:
- تعویض دو ستون از ماتریس با یکدیگر.
- ضرب یک ستون ماتریس در یک عدد حقیقی مخالف صفر.
- اضافه کردن مضربی از یک ستون ماتریس به ستون دیگر آن.

برای به رمز درآوردن یک پیام با استفاده از ماتریس‌ها، به دو ماتریس قابل ضرب مربعی A و ماتریس (نه الزاماً مربعی) B به گونه‌ای نیازمندیم که متن رمز در قالب حاصل‌ضرب دو ماتریس A و B ارائه شود. به بیان بهتر، ماتریس B دربرگیرندهٔ پیام اصلی است که به‌صورت رمز درآمده، ماتریس A کلید رسیدن به پیام رمزآلود شده است، و ماتریس AB حاوی رمزی است که حامل رمز آن را در اختیار دارد و می‌باید از تساوی ماتریسی $A^{-1}(AB)=B$ به محاسبهٔ ماتریس B بپردازیم. (البته روشن است که حامل رمز تنها ماتریس AB را در اختیار دارد. از طرف دیگر، فردی که می‌خواهد رمزگشایی کند، می‌باید ماتریس A را در اختیار داشته باشد تا به واسطهٔ آن A^{-1} مطلوب را تعیین کند و سپس با عملیات ضرب $A^{-1}(AB)$ به ماتریس B که هدف اصلی در این محاسبه است، دست پیدا کند.)

بنابراین بحث اصلی می‌باید روی ماتریس A انجام پذیرد. چراکه بدون این ماتریس عملاً رمز گشوده نمی‌شود. اما آیا هر ماتریس مربعی را می‌توان به‌عنوان ماتریس A در نظر گرفت و با انجام محاسبات لازم به مقصود نهایی رسید؟ در پاسخ بیان می‌کنیم که می‌توان هر ماتریس مربعی را به‌عنوان ماتریس A در نظر گرفت. اما اگر برای این ماتریس

شـرایط و ویژگی‌هایـی را ملاک عمل قرار دهیم، در انجام محاسـبات جبری لازم برای رمزگشایی از عملکرد بهتری برخوردار می‌شویم. چون برای محاسبهٔ معکوس ماتریس A از رابطهٔ $A^{-1} = \frac{1}{|A|} A^*$ استفاده می‌کنیم، روشن است که اگر دترمینان ماتریس A همواره برابر با ۱+ یا ۱- باشد، برای ضرب مقدار $\frac{1}{|A|}$ در ماتریس A^* از محاسبات ساده‌تری بهره‌مند می‌شـویم. در ضمن اگر درایه‌های ماتریـس A همواره اعداد صحیح[۲۳] اختیار کنند، به هنگام انجام اعمال سطری یا ستونی مقدماتی نیز دچار زحمت کمتری می‌شـویم. به این منظور همیشه در انتخاب ماتریس A موارد زیر را ملاک توجه خود قرار می‌دهیم.[۲۴]

۱. ماتریس A همواره مربعی اسـت و مرتبهٔ آن به‌گونه‌ای اختیار شود که حاصل‌ضرب ماتریسی $A^{-1}(AB)$ امکان‌پذیر باشد.
۲. ماتریس A به‌گونه‌ای اختیار شود که درایه‌های آن اعداد صحیح را اختیار کنند.
۳. ماتریس A به گونه‌ای اختیار شود که دترمینان آن همواره برابر با ۱+ یا ۱- باشد.

اکنون این سؤال مطرح می‌شود که چگونه ماتریسی انتخاب کنیم که دترمینان آن همواره برابر با ۱+ یا ۱- شود؟ آیا استفاده از روش‌های تصادفی برای نوشـتن درایه‌های یک ماتریس و سـپس با اسـتفاده از روش‌های مرسـوم برای محاسبهٔ دترمینان ماتریس‌ها، معیاری کارامد برای نیل به مقصود است یا خیر؟ برای پاسخ به این سؤال بیان می‌کنیم، از آنجـا که دترمینان ماتریس‌های قطری و ماتریس‌های مثلثی برابر با حاصل‌ضرب درایه‌های واقع بر قطر اصلی ماتریس است، بنابراین برای اینکه ماتریسـی با دترمینان ۱+ یا ۱- در اختیار داشـته باشـیم، باید ماتریسی بالامثلثی یا پایین‌مثلثی که درایه‌های روی قطر اصلی آن‌ها ۱+ یا ۱- باشند، در نظر بگیریم. اکنون با توجه به اینکه می‌دانیم انجام اعمال سـطری مقدماتی و اعمال ستونی مقدماتی روی دترمینان این نوع از ماتریس‌ها تغییری ایجاد نمی‌کند[۲۵]، با بهره‌گیری از این اعمال به تغییر ظاهر و ساختار درایه‌های ماتریس می‌پردازیم تا ماتریس انتخاب شده از ظاهر و ساختمان پیچیده‌تری برخوردار شود و اگر به هر دلیلی ماتریس مزبور به‌دسـت افراد غیرمجاز افتاد، آن‌ها نتوانند به سهولت و راحتی و در حداقل زمان با استفاده از این کلید، رمز پیام را بگشایند.

اما وضعیـت ارائهٔ ماتریس B که حاوی رمز پیام و به‌عبارت بهتر، ماتریس هدف در محاسـبات رمزگشـایی اسـت، چگونه است؟ برای نوشتن درایه‌های آن از چه روش و راهکاری باید استفاده کنیم؟ به این منظور می‌توان از روش‌هایی برای متناظر کردن حروف تشکیل‌دهندهٔ پیام با درایه‌های ماتریس B اسـتفاده کرد که در ادامه به یک روش از آن‌ها می‌پردازیم.

حروف الفبای انگلیسـی را به ترتیب و پشت‌سرهم بنویسیم و هر یـک از آن‌ها را به‌صورت متوالی با اعداد ۱، ۱-، ۲، ۲-، ۳، ۳-، ...، ۱۱، ۱۱-، ۱۲، ۱۲-، ۱۳، ۱۳- نظیر کنیم. بنابراین:

A →۱, B →-۱, C →۲, D→-۲, ... , W→۱۲, X→-۱۲, Y→۱۳, Z→-۱۳

و درایـهٔ صفر در ماتریس B بیانگر فاصلهٔ بین دو کلمهٔ موجود در پیام اصلی است.

مثال: فردی پیام زیر را دریافت کرده است. چگونگی رمزگشایی و رمزنگاری این پیام را در زیر مشاهده می‌کنید:

$$-۳۸, -۴, -۳, -۳۷, -۲۰۹, -۷۱, -۱۵۳, ۱۵۵, -۱۶, ۲۱, ۴۳, -۴۸, -۱۹, -۲۷, -۴۷, ۱۱۵, ۳۰, -۲۸, -۵۴, ۸۴$$

دریافــت کنندهٔ این پیام بعد از دریافــت آن، اعداد قرار گرفته شده در این پیام را در قالب ماتریس روبه‌رو می‌گنجاند.

$$AB=\begin{bmatrix} ۳۸ & -۲۰۹ & -۱۶ & -۱۹ & ۳۰ \\ -۴ & -۷۱ & ۲۱ & -۲۷ & -۲۸ \\ -۳ & -۱۵۳ & ۴۳ & -۴۷ & -۵۴ \\ -۳۷ & ۱۵۵ & -۴۸ & ۱۱۵ & ۸۴ \end{bmatrix}$$

البته وی به ماتریس $A=\begin{bmatrix} ۲۰ & -۱ & ۱۳ & ۲ \\ ۶ & -۴ & ۷ & ۱ \\ ۱۳ & -۸ & ۱۴ & ۲ \\ -۱۳ & ۱۱ & -۲۱ & -۳ \end{bmatrix}$ نیز برای انجام محاسبات لازم برای رمزگشایی پیام نیاز دارد. پس:

$$A^{-۱}=\begin{bmatrix} ۰ & -۲ & ۱ & ۰ \\ ۰ & -۱۳ & ۵ & -۱ \\ -۱ & -۱۰۵ & ۴۳ & -۷ \\ ۷ & ۶۹۶ & -۲۸۷ & ۴۵ \end{bmatrix}$$

بنابراین:

$$A^{-۱}(AB)=\begin{bmatrix} ۰ & -۲ & ۱ & ۰ \\ ۰ & -۱۳ & ۵ & -۱ \\ -۱ & -۱۰۵ & ۴۳ & -۷ \\ ۷ & ۶۹۶ & -۲۸۷ & ۴۵ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۳۸ & -۲۰۹ & -۱۶ & -۱۹ & ۳۰ \\ -۴ & -۷۱ & ۲۱ & -۲۷ & -۲۸ \\ -۳ & -۱۵۳ & ۴۳ & -۴۷ & -۵۴ \\ -۳۷ & ۱۵۵ & -۴۸ & ۱۱۵ & ۸۴ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۵ & -۱۱ & ۱ & ۷ & ۲ \\ ۰ & ۳ & -۱۰ & ۱ & ۱۰ \\ -۶ & ۰ & -۴ & -۱۰ & ۰ \\ ۸ & ۷ & ۳ & ۵ & ۰ \end{bmatrix}=B$$

بنابراین:

$$۵, ۰, -۶, ۸, -۱۱, ۳, ۰, ۷, ۱, ۱, -۱۰, -۴, ۳, ۷, ۱, -۱۰, ۵, ۲, ۱۰, ۰, ۰$$

اکنون با متناظر کردن هر یک از اعداد بالا با حروف انگلیسی بنابر آنچه که بیان شده است، پیام زیر را به‌دست می‌آورد:

I LOVE MATHEMATICS

روش محاسبهٔ ماتریس A توسط اعضای گروه طراحی رمز:

$$\begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۵ & -۱ & ۰ & ۰ \\ ۳ & ۸ & -۱ & ۰ \\ ۶ & -۴ & ۷ & ۱ \end{bmatrix}\xRightarrow{\substack{R_۴+R_۱ \\ R_۴+R_۲ \\ R_۴+R_۳}}\begin{bmatrix} ۷ & -۴ & ۷ & ۱ \\ ۱۱ & -۵ & ۷ & ۱ \\ ۹ & ۴ & ۶ & ۱ \\ ۶ & -۴ & ۷ & ۱ \end{bmatrix}\xRightarrow{R_۲+R_۳}\begin{bmatrix} ۷ & -۴ & ۷ & ۱ \\ ۱۱ & -۵ & ۷ & ۱ \\ ۲۰ & -۱ & ۱۳ & ۲ \\ ۶ & -۴ & ۷ & ۱ \end{bmatrix}\xRightarrow{\substack{R_۴+R_۱ \\ -۲R_۴+R_۲}}\begin{bmatrix} ۱۳ & -۸ & ۱۴ & ۲ \\ -۱ & ۳ & -۷ & -۱ \\ ۲۰ & -۱ & ۱۳ & ۲ \\ ۶ & -۴ & ۷ & ۱ \end{bmatrix}\xRightarrow{\substack{R_۱\leftrightarrow R_۳ \\ R_۲\leftrightarrow R_۴}}$$

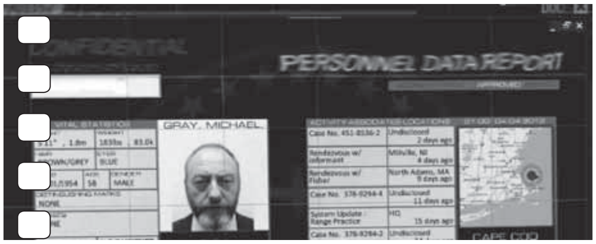
$$\begin{bmatrix} ۲۰ & -۱ & ۱۳ & ۲ \\ ۶ & -۴ & ۷ & ۱ \\ ۱۳ & -۸ & ۱۴ & ۲ \\ -۱ & ۳ & -۷ & -۱ \end{bmatrix}\xRightarrow{-۲R_۳+R_۴}\begin{bmatrix} ۲۰ & -۱ & ۱۳ & ۲ \\ ۶ & -۴ & ۷ & ۱ \\ ۱۳ & -۸ & ۱۴ & ۲ \\ -۱۳ & ۱۱ & -۲۱ & -۳ \end{bmatrix}=A \Rightarrow |A|=۱$$

بنابراین:

$$A^{-۱}=\begin{bmatrix} ۰ & -۲ & ۱ & ۰ \\ ۰ & -۱۳ & ۵ & -۱ \\ -۱ & -۱۰۵ & ۴۳ & -۷ \\ ۷ & ۶۹۶ & -۲۸۷ & ۴۵ \end{bmatrix}\Rightarrow |A^{-۱}|=۱$$

ایستگاه اعداد چیست؟

ایستگاه اعداد یک ایستگاه رادیویی موج کوتاه است که معمولاً در آن‌ها یک زن در حال خواندن یک مجموعه از اعداد است. البته گاهی در این ایستگاه‌ها به جای استفاده از یک زن برای خواندن اعداد مزبور، از یک مرد یا از یک بچه یا از یک ربات یا تلفیقی از صدای آن‌ها استفاده می‌شود. هر چند که تاکنون هیچ کشور یا سازمانی مسئولیت ایستگاه‌های اعداد و اعداد ارسال شده در آن‌ها را به‌عهده نگرفته است، اما در حقیقت این ایستگاه‌های اعداد به منظور ارسال پیام‌های محرمانه و رمزگونه برای مأموران اطلاعاتی و جاسوسان از جانب سرویس‌های اطلاعاتی و جاسوسی کشورها مورد استفاده قرار می‌گیرد. جاسوسان نیز با در اختیار داشتن کلید رمزها، می‌توانند به پیام نهفته در رمز دست یابند. اولین استفاده از ایستگاه‌های اعداد به جنگ جهانی اول باز می‌گردد و بیشترین استفاده از این ایستگاه‌ها به دوران جنگ سرد بین دو اَبَرقدرت شرق و غرب، یعنی اتحاد جماهیر شوروی و ایالات متحدهٔ آمریکا برمی‌گردد. استفاده از ایستگاه‌های اعداد بعد از پایان جنگ سرد در سال ۱۹۸۹ و فروپاشی اتحاد جماهیر شوروی در سال ۱۹۹۱ رو به کاهش نهاد. اما امروزه هنوز تعدادی از آن‌ها با تغییراتی در طراحی این ایستگاه‌ها و نیز دگرگونی‌هایی در چگونگی استفاده از گویندهٔ اعداد، فعال هستند.



داستان فیلم

اِمِرسون کِنت یکی از مأموران سرویس اطلاعاتی ایالات متحدهٔ آمریکاست که به‌عنوان عضو حرفه‌ای این سازمان زیر نظر مافوق خود، **مایکل گِرِی**، مأموریت‌هایی را انجام می‌دهد. مأموریت جدید او اعزام به کشور انگلیس و ورود به یک ایستگاه اعداد و همراهی و محافظت از شخصی به نام **کاترین** است که به‌عنوان گویندهٔ اعداد قرار است در این ایستگاه فعالیت کند. بعد از گذشت چند روز از آغاز فعالیت آن‌ها در ایستگاه اعداد، عده‌ای به آن‌ها حمله می‌کنند که هدفشان دست یافتن به اطلاعات محرمانه‌ای است که در این ایستگاه اعداد ارسال و تبادل می‌شود. در این بین درگیری‌هایی صورت می‌گیرد که در نهایت با اتخاذ تصمیم‌ها و ابتکار عمل‌های درست از جانب اِمِرسون کِنت، باعث نجات جان او و کاترین می‌شود. در اینجا از پرداختن به جزئیات این فیلم پرهیز می‌کنیم تا به هنگام تماشای آن از انگیزه و هیجان کافی برخوردار باشید.

*** پی‌نوشت**

1. Kaspar Barford
2. Sean Furst
3. Bryan Furst
4. Nigel Thomas
5. F. Scott Frazier
6. John Cusack
7. Malin Akerman
8. Paul Leonard - Morgan
9. Chris Gill
10. Per Sandholt

۱۱. برگرفته از کتاب «**آشنایی با رمزگشایی به روش ریاضی**» به قلم **آبراهام سینکوف** که توسط **رویا درودی** و **عبدالله محمودیان** به فارسی برگردان شده و چاپ نخست آن در سال ۱۳۷۴ در «انتشارات مرکز نشر دانشگاهی» به زیور طبع آراسته شده است.

۱۲. ریاضی‌آموزان برای بررسی بیشتر و بهتر روش رمزنگاری با استفاده از ماتریس‌ها می‌توانند به مقالهٔ «**رمزنگاری با استفاده از ماتریس‌ها**» به قلم **احسان یارمحمدی** در شمارهٔ ۲ «مجلهٔ ریاضی پایا» که در تابستان ۱۳۹۲ در شرکت آموزشی فرهنگی «مبتکران» به زیور طبع آراسته شده است، مراجعه کنند.

13. Square Matrices
14. Diagonal
15. Detrminant
16. Invertible Matrix
17. Upper Triangular Matrix
18. Lower Triangular Matrix
19. Elementary Row Operations
20. Elementary Column Operations
21. Identity Matrix
22. Adjacency Matrix
23. Integer Numbers

۲۴. ریاضی‌آموزان برای درک بهتر این موضوع بهتر است که قبل از بررسی مثال‌ها و تمرین‌های این مقاله مثال زیر را مورد کنکاش قرار دهند:

فردی پیام زیر را دریافت کرده است. چگونگی رمزگشایی و رمزنگاری این پیام را در مقابل مشاهده می‌کنید: ۸-,۱-,۱۰۲-,۳۳-,۲۶,۷۳

دریافت‌کنندهٔ این پیام بعد از دریافت آن، اعداد پیام را در قالب ماتریس زیر می‌گنجاند:

$$AB=\begin{bmatrix} ۲۶ & -۳۳ & -۱ \\ ۷۳ & -۱۰۲ & -۸ \end{bmatrix}$$

البته وی به ماتریس $A=\begin{bmatrix} -۳ & ۷ \\ -۹ & ۲۰ \end{bmatrix}$، $|A|=۳\neq \pm ۱$ نیز برای انجام محاسبات لازم برای رمزگشایی پیام نیاز دارد. پس:

$$A^{-۱}=\begin{bmatrix} ۶/۶۶۷ & -۲/۳۳۳ \\ ۳ & -۱ \end{bmatrix}$$

بنابراین:

$$A^{-۱}(AB)=\begin{bmatrix} ۶/۶۶۷ & -۲/۳۳۳ \\ ۳ & -۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۲۶ & -۳۳ & -۱ \\ ۷۳ & -۱۰۲ & -۸ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۳/۰۳۳ & ۱۷/۹۵۵ & ۱۱/۹۹۷ \\ ۵ & ۳ & ۵ \end{bmatrix}\approx B$$

با انتخاب مقادیر تقریبی برای درایه‌های ماتریس B داریم: ۳,۵,۱۸,۳,۱۲,۵

۲۵. ممکن است تعدادی از ریاضی‌آموزان از بیان این مطلب دچار تعجب شوند که چگونه امکان دارد که بنابر اعمال سطری یا ستونی مقدماتی، سطر یا ستونی از یک ماتریس در یک عدد حقیقی مخالف صفر ضرب شود، اما دترمینان آن تغییر نکند. در اینجا منظور نگارندهٔ مقاله از انجام اعمال سطری و ستونی مقدماتی برای تغییر ظاهر و ساختمان ماتریس، استفاده از اضافه کردن مضربی از یک سطر یا ستون ماتریس به سطر یا ستون دیگری از آن است که انجام این اعمال هیچ‌گونه تغییری در مقدار دترمینان ماتریس‌های بالامثلثی یا پایین‌مثلثی که دترمینان آن‌ها همواره برابر ۱+ یا ۱- باشد، ایجاد نمی‌کند. در ضمن هنگام انجام اعمال سطری یا ستونی مقدماتی با استفاده از روش تعویض دو سطر یا ستون از ماتریس با یکدیگر، اگر تعداد تعویض‌های سطرها یا ستون‌ها با یکدیگر عددی زوج باشد، دترمینان ماتریس تغییر نمی‌کند و اگر تعداد تعویض‌های سطرها یا ستون‌ها با یکدیگر عدد فردی باشد، دترمینان ماتریس قرینه می‌شود.

* فیلم ایستگاه اعداد (به‌صورت دوبله شده به زبان فارسی) در ساعت ۳۰ دقیقهٔ بامداد روز ۹۵/۲/۳۱ از شبکهٔ ۳ سیمای جمهوری اسلامی ایران پخش شده است.